Lösungen zur
Modulprüfung zur
Elementaren Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrkräfte an der an der FU

Dozent: V.Schulze   Datum: ?.?.2026   Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben, pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

aus der symmetrischen Gruppe S_6 vom Index 6.
(i) Man stelle π dar als Produkt elementefremder Zyklen.
Man stelle $(1,2,3)$ dar als Produkt von Transpositionen.
(ii) Gegeben sei die Untergruppe $U := \{id, (1,3)\}$ von S_6 .
Man bestimme die Elemente der Nebenklassen $(1,2)U$ und $U(1,2)$ und zeige, daß U kein Normalteiler von S_6 ist.

Lösung von Aufgabe 1

(i) Es gilt $\pi = (1,2,3)(2,6,5)$.
Es gilt zum Beispiel $(1,2,3) = (1,2)(2,3)$.
(ii) Es gilt
$(1,2)U = \{1,2), (1,2)(1,3)\} = \{(1,2)(1,3,2)\}$,
$U(1,2) = \{(1,2), (1,3)(1,2)\} = \{(1,2)(1,2,3)\}$.
Da die beiden Nebenklassen verschieden sind, ist U kein Normalteiler in S_6 .

Aufgabe 2

Der Unterring $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ von $\mathbb{R}$ sei definiert durch $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] := \{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Der Unterring $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ von $\mathbb{C}$ sei definiert durch $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Sei $f : \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ definiert durch $f(a + b\sqrt{5}) := a + b)\sqrt{-3}$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
(i) Man zeige: f ist bezüglich + ein Gruppenhomomorphismus.
Ist f auch ein Ringhomomorphismus ?
(ii) Ist f surjektiv ?

Lösung von Aufgabe 2

(i) Es gilt $f((a+b\sqrt{5})+(c+d\sqrt{5})) = f((a+c)+(b+d)\sqrt{5}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{-3} = (a + b\sqrt{-3}) + (c + d\sqrt{-3}) = f(a + b\sqrt{5}) + f(c + d\sqrt{5})$,
also ist f relationstreu bezüglich + .
(ii) Es gilt $f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = f(5)$ und
$f((\sqrt{5}) \cdot f(\sqrt{5}) = \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -3$.
Also ist f nicht relationstreu bezüglich $\cdot$, also auch kein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3

(i) Man überprüfe mit Hilfe einer Rechenprobe, ob die Gleichung
$902^3 - 5 \cdot 12115^2 = 4689$ richtig ist.
Kann man zur Überprüfung die Dreierprobe anwenden ?
(ii) Ist die Kongruenz $119 \cdot x \equiv 1 \pmod{13}$ lösbar ?

Lösung von Aufgabe 3

(i) Verwendung der 9-er Probe:
Berechne die Quersummen
$q(902) = 11, q(902) \equiv 2 \pmod{9}$;
$q(5) = 5, q(5) \equiv 5 \pmod{9}$;
$q(12115) = 10, q(12115) \equiv 1 \pmod{9}$;
$q(4689) = 27, q(4689) \equiv 0 \pmod{9}$.
Annahme: Die Gleichung gilt. Dann folgt durch Rechnung mod 9
$2^3 - 5 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{9}$.
Dies ist aber nicht richtig, also ist die Gleichung falsch.
Analog kann man auch die 11-er Probe verwenden, wobei anstelle der Quersumme die alternierende Quersumme zu verwenden ist.
Bei Verwendung der 3-er Probe ergibt sich analog zur 9-er Probe die Kongruenz $2^3 - 5 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{3}$.
Die Kongruenz ist richtig, also kann man mit Hilfe der 3e-er Probe nicht

entscheiden, ob die Gleichung
$902^3 - 5 \cdot 12115^2 = 4689$ richtig ist.
(ii) Wegen $119 \equiv 2 \pmod{13}$ kann in der Kongruenz 119 durch 2 ersetzt werden und wegen $ggT(2,13) = 1$ ist die Kongruenz $119 \cdot x \equiv 1 \pmod{13}$ lösbar.
Man kann auch direkt $ggT(119,13) = 1$ zeigen

Aufgabe 4

(i) Man zeige, daß $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.
Ist $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Z}_6[x]$ irreduzibel ?
(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$
Man gebe eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)) : \mathbb{Q}$ an.
Ist $\{1, \alpha, \alpha^3, \}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$?

Lösung von Aufgabe 4

(i) Das Polynom $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel nach Eisenstein ($p = 2$) und nach Gauss dann auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
Alternativ: $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ hat den Grad 3, also ist das Polynom irreduzibel, wenn es in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt.
Mögliche Nullstellen sind die Teiler von 6 in $\mathbb{Q}$. Durch einsetzen sieht man, dass das Polynom in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt.
$x^3 + 2\,x + 6 =\in \mathbb{Z}_6[x]$ ist nicht irreduzibel, da das Polynom die Nullstelle 0 besitzt.
(ii) Nach (i) ist $x^3 + 2\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel , das Polynom ist also das Minimalpolynom von α.
Nach Vorlesung ist dann $\{1, \alpha, \alpha^2, \}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.
$\{1, \alpha, \alpha^3, \}$ keine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$, denn die drei Elemente sind linear abhängig wegen der Nullstellengleichung $\alpha^3 + 2\,\alpha + 6 = 0$.